

ML 13 Puissance itérée par bloc et SVD

1 Principe et application à la décomposition en valeurs propres

Nous avons vu précédemment que la méthode de la puissance itérée permet de calculer la plus grande valeur propre et un vecteur propre associé pour une matrice carrée \mathbf{A} . La décomposition QR est au cœur d'une approche élégante pour étendre la méthode de la puissance itérée au calcul des S plus grandes valeurs propres et leurs vecteurs propres associés.

Une itération consiste à multiplier \mathbf{A} par un bloc $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times S}$ de S vecteurs colonnes. Si ce processus est répété, nous nous attendons à trouver le même résultat que pour la méthode de la puissance itérée : chaque colonne de \mathbf{V} convergera vers le (même) plus grand vecteur propre.

Mais si, par une décomposition QR, nous forçons les colonnes de \mathbf{V} à rester orthogonales, pour une matrice \mathbf{A} symétrique, le processus itératif fera tendre ces colonnes vers différents vecteurs propres et la diagonale de \mathbf{R} contiendra les valeurs propres correspondantes.

Puissance itérée par bloc pour les vecteurs propres

Résultat: Vecteurs propres d'une matrice symétrique par la méthode de la puissance itérée par bloc

Entrée: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symétrique

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times S}$

Sortie : Les colonnes de \mathbf{V} sont les S premiers vecteurs propres.

Les valeurs propres correspondantes sont sur la diagonale de $\mathbf{\Lambda}$.

```
1 tant que  $err > \epsilon$  faire
2    $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{V}$ 
3    $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ 
4    $\mathbf{V} \leftarrow S$  premières colonnes de  $\mathbf{Q}$ 
5    $\mathbf{\Lambda} \leftarrow S$  premières valeurs diagonales de  $\mathbf{R}$ 
6    $err \leftarrow \|\mathbf{A}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\|$ 
7 fintq
```

2 Application à la décomposition en valeurs singulières

Nous pouvons de même adapter l'algorithme de la puissance itérée au cas du SVD pour calculer les S plus grandes valeurs singulières et les vecteurs singuliers associés pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

Puissance itérée par bloc pour le SVD

Résultat: Valeurs singulières d'une matrice symétrique par la méthode de la puissance itérée par bloc

Entrée: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times S}$ peut être initialisée avec des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs.

Sortie : $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times S}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times S}$

$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_S)$

telles que $\mathbf{AV} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}$

```
1 tant que  $err > \epsilon$  faire
2    $\mathbf{AV} = \mathbf{QR}$ 
3    $\mathbf{U} \leftarrow S$  premières colonnes de  $\mathbf{Q}$ 
4    $\mathbf{A}^T\mathbf{U} = \mathbf{QR}$ 
5    $\mathbf{V} \leftarrow S$  premières colonnes de  $\mathbf{Q}$ 
6    $\mathbf{\Sigma} \leftarrow S$  premières lignes et colonnes de  $R$ 
7    $err \leftarrow \|\mathbf{AV} - \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\|$ 
8 fintq
```
